

Minimalne wymagania dla osób zdających egzamin dyplomowy „licencjacki”
na specjalności matematyka teoretyczna
kończących studia od roku akademickiego 2020/2021

Znajomość poniższych zagadnień jest niezbędna do ubiegania się o uzyskanie stopnia
licencjata matematyki.

	W zakresie logiki i teorii mnogości
	<ol style="list-style-type: none">1. Wybrane prawa klasycznej logiki zdań i kwantyfikatorów, pojęcie wartościowania i tautologii.2. Zbiory uporządkowane, elementy wyróżnione, dobre porządki, lemat Kuratowskiego-Zorna.3. Składanie funkcji, obrazy i przeciwobrazy wyznaczone przez funkcje, działania uogólnione.4. Relacje równoważności i ich zastosowania, zasada abstrakcji.5. Równoliczność i moce zbiorów, twierdzenie Cantora, twierdzenie Cantora-Bernsteina.
	W zakresie kombinatoryki
	<ol style="list-style-type: none">6. Liczby naturalne, zasada indukcji matematycznej.7. Schematy wyboru i zliczanie funkcji na zbiorach skończonych.8. Współczynniki dwumianowe i dowodzenie tożsamości kombinatorycznych.9. Zasada włączeń i wyłączeń.10. Podziały zbiorów i liczb: podziały uporządkowane i nieuporządkowane, liczby Stirlinga, liczby Bella, diagramy Ferrersa.11. Zależności rekurencyjne i rozwiązywanie rekurencji: funkcje tworzące, równania charakterystyczne.12. Grafy proste, skierowane, regularne, cykle i drogi Eulera i Hamiltona w grafach, drzewa, drzewa spinające, grafy planarne i twierdzenie Eulera, twierdzenie Halla o kojarzeniu małżeństw.
	W zakresie algebry
Algebra liniowa	<ol style="list-style-type: none">13. <u>Ciało liczb zespolonych</u>: interpretacja geometryczna, pierwiastkowanie liczb zespolonych, pierwiastki z jedynki, zasadnicze twierdzenie algebry.14. <u>Przestrzeń liniowa</u>: pojęcie i przykłady przestrzeni liniowych, liniowa niezależność wektorów, pojęcie bazy i wymiaru, konstrukcja przestrzeni ilorazowej.15. <u>Przekształcenia liniowe</u>: pojęcie i przykłady, obraz i jądro, macierz przekształcenia liniowego, wielomian charakterystyczny, wektory i wartości własne.16. <u>Macierze i wyznaczniki</u>: pojęcie i przykłady, mnożenie macierzy, rząd macierzy i metody jego wyznaczania, definicja i własności wyznaczników.17. <u>Układy równań liniowych</u>: przykłady, twierdzenie Kroneckera-Capellego, twierdzenie Cramera, układy równań jednorodnych.18. <u>Odwzorowania wieloliniowe</u>: formy wieloliniowe, formy dwuliniowe, macierz formy, iloczyn skalarny.

Teoria Liczb	<p>19. <u>Relacja podzielności w zbiorze liczb całkowitych</u>: własności, twierdzenie o dzieleniu z resztą, największy wspólny dzielnik, najmniejsza wspólna wielokrotność, algorytm Euklidesa.</p> <p>20. <u>Liczby pierwsze</u>: twierdzenie o nieskończoności zbioru liczb pierwszych, sito Eratostenesa, twierdzenie o jednoznaczności rozkładu.</p> <p>21. <u>Kongruencje</u>: własności, rozwiązywanie kongruencji liniowych, chińskie twierdzenie o resztach.</p> <p>22. <u>Funkcja Eulera</u> i jej własności, twierdzenie Eulera, małe twierdzenie Fermata.</p>
Algebra	<p>23. <u>Podstawowe pojęcia teorii grup</u>: grupa, grupa abelowa, zbiór generatorów grupy, grupa cykliczna, podgrupa, podgrupa normalna, rząd grupy, rząd elementu, izomorfizm grup, twierdzenie Lagrange'a.</p> <p>24. <u>Homomorfizmy grup i grupy ilorazowe</u>: pojęcie homomorfizmu, jądro i obraz homomorfizmu, pojęcie warstw lewo- i prawostronnych, ich własności, pojęcie grupy ilorazowej, twierdzenie o izomorfizmie grup.</p> <p>25. <u>Podstawowe pojęcia dotyczące grup permutacji</u>: transpozycje i cykle, rozkład permutacji na cykle, permutacje parzyste i nieparzyste, grupa permutacji parzystych, twierdzenie Cayley'a.</p> <p>26. <u>Twierdzenia Sylowa i pojęcia z nimi związane</u>: działanie grupy na zbiorze, orbita elementu, przykłady działań, klasa elementów sprzężonych, podgrupy sprzężone, p-grupy i ich własności, p-podgrupa Sylowa, twierdzenia Sylowa, grupy proste i twierdzenie Galois o prostocie grupy permutacji parzystych.</p> <p>27. <u>Grupy rozwiązalne</u>: komutant i centrum grupy, własności i przykłady grup rozwiązalnych.</p> <p>28. <u>Podstawowe pojęcia teorii pierścieni przemiennych</u>: pierścien, dziedzina całkowitości, podpierścien, ideał pierścienia, ideał główny, pierścien ideałów głównych, ideał maksymalny, ideał pierwszy.</p> <p>29. <u>Homomorfizmy pierścieni i pierścienie ilorazowe</u>: jądro i obraz homomorfizmu, twierdzenie o izomorfizmie pierścieni, charakteryzacja ideałów pierwszych i maksymalnych za pomocą pierścieni ilorazowych.</p> <p>30. <u>Typy elementów w pierścieniach</u>: elementy odwracalne, dzielniki zera, elementy nierozkładalne i elementy pierwsze, elementy stowarzyszone, największy wspólny dzielnik, najmniejsza wspólna wielokrotność.</p> <p>31. <u>Jednoznaczność rozkładu w dziedzinach całkowitości i jej zastosowania</u>: relacja podzielności w dziedzinie całkowitości, pojęcie jednoznaczności rozkładu, twierdzenie Gaussa, pierścienie Euklidesa, zastosowania do rozwiązalności równań diofantycznych.</p> <p>32. <u>Pierścienie wielomianów nad ciałami C, R, Q</u>: wielomiany nierozkładalne, kryterium Eisensteina.</p> <p>33. <u>Pojęcie ciała i jego rozszerzenia</u>: elementy algebraiczne i przestępne, liczby algebraiczne i przestępne, baza i stopień rozszerzenia, ciało rozkładu wielomianu, rozszerzenia pojedyncze, lemat Abela.</p>
	<p>W zakresie analizy</p>
Analiza matematyczna	<p>34. <u>Funkcje liczbowe</u>: definicja funkcji liczbowej, dziedzina, zbiór wartości, wykres funkcji. Funkcje: monotoniczne, parzyste i nieparzyste, okresowe, ograniczone i ich kresy, różnowartościowe, surjekcje, odwrotne, złożone, elementarne.</p> <p>35. <u>Ciągi liczbowe</u>: definicje, przykłady, ciąg arytmetyczny, ciąg geometryczny, ciągi monotoniczne i ograniczone, granica ciągu i jej własności, działania na ciągach, twierdzenie o trzech ciągach, liczba e, podciągi, twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.</p> <p>36. <u>Granice funkcji</u>: definicje Heinego i Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie, działania arytmetyczne na granicach funkcji, twierdzenie o granicy funkcji złożonej, granice niewłaściwe.</p>

	<p>37. <u>Ciągłość funkcji</u>: definicje Heinego i Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie, ciągłość sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji, ciągłość funkcji elementarnych, ciągłość jednostajna, twierdzenie Weierstrassa, twierdzenie Cantora, własność Darboux.</p> <p>38. <u>Pochodna funkcji</u>: iloraz różnicowy, definicja pochodnej funkcji w punkcie, interpretacja geometryczna i fizyczna pochodnej, różniczka funkcji, pochodne funkcji elementarnych, działania arytmetyczne na pochodnych, pochodne funkcji: odwrotnej i złożonej, ekstrema funkcji, warunek konieczny i dostateczny istnienia ekstremum, twierdzenie Rolle'a, twierdzenie Lagrange'a, interpretacja geometryczna znaku pochodnej, reguła de l'Hospitala, wyrażenia nieoznaczone, pochodne wyższych rzędów, twierdzenie i wzór Taylora, drugi warunek wystarczający istnienia ekstremum.</p> <p>39. <u>Całka oznaczona</u>: określenie całki oznaczonej, warunki całkowalności, interpretacja geometryczna i fizyczna całki oznaczonej, twierdzenia podstawowe rachunku całkowego (wzór Newtona-Leibniza), zastosowania geometryczne całki oznaczonej.</p> <p>40. <u>Szeregi liczbowe</u>: definicja szeregu liczbowego, ciągi sum częściowych, warunek konieczny zbieżności szeregu, szeregi naprzemienne, kryterium Leibniza, szeregi o wyrazach dowolnych, zbieżność warunkowa, zbieżność bezwzględna, zmiana porządku wyrazów szeregu.</p> <p>41. <u>Ciągi i szeregi funkcyjne</u>: definicja ciągu funkcyjnego, zbieżność punktowa, funkcja graniczna, zbieżność jednostajna, warunek Cauchy'ego, ciągłość funkcji granicznej, definicja szeregu funkcyjnego, kryterium Weierstrassa, twierdzenie o całkowaniu szeregu funkcyjnego, twierdzenie o różniczkowaniu szeregu funkcyjnego, szeregi potęgowe, promień i obszar zbieżności szeregu potęgowego, twierdzenie Hadamarda o promieniu zbieżności, twierdzenie o całkowaniu szeregu potęgowego, twierdzenie o różniczkowaniu szeregu potęgowego, szereg Taylora.</p> <p>42. <u>Całka niewłaściwa</u>: całka niewłaściwa w przedziale nieskończonym, całka niewłaściwa funkcji nieograniczonej.</p> <p>43. <u>Funkcje wielu zmiennych</u>: granice i ciągłość funkcji wielu zmiennych.</p> <p>44. <u>Pochodne funkcji wielu zmiennych</u>: pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, pochodne cząstkowe wyższych rzędów, twierdzenie Schwarz'a, różniczkowalność, różniczkowanie funkcji złożonej, pochodna kierunkowa, gradient funkcji, funkcja uwikłana, pochodna funkcji uwikłanej, ekstremum funkcji, warunek konieczny i dostateczny istnienia ekstremum, ekstrema warunkowe, najmniejsza i największa wartość funkcji.</p> <p>45. <u>Całki wielokrotne</u>: całka podwójna w prostokącie, interpretacja geometryczna, własności, całka podwójna w obszarze normalnym, całki iterowane, zamiana zmiennych w całce podwójnej, całki potrójne w prostopadłości, interpretacja geometryczna, własności, całka potrójna w obszarze regularnym, zamiana zmiennych w całce wielokrotnej.</p> <p>46. <u>Całki krzywoliniowe i powierzchniowe</u>: całka krzywoliniowa skierowana, twierdzenie Greena i jego zastosowania, twierdzenie o niezależności całki krzywoliniowej od drogi całkowania, całka krzywoliniowa nieskierowana, długość krzywej, całka powierzchniowa nieorientowana, całka powierzchniowa zorientowana, twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego, twierdzenie Stokesa, interpretacje geometryczne.</p>
--	--

Równania różniczkowe zwyczajne	<p>47. <u>Pojęcia</u>: równanie różniczkowe zwyczajne, rozwiązania równania, ich rodzaje, zagadnienie początkowe, interpretacja geometryczna.</p> <p>48. <u>Szczególne równania</u>: równania o zmiennych rozdzielonych, zupełne, liniowe I-go rzędu.</p> <p>49. Twierdzenie o lokalnym istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego.</p> <p>50. Liniowe równania n-tego rzędu o stałych współczynnikach. Wronskian.</p> <p>51. Liniowe układy równań I-go rzędu o stałych współczynnikach i algebraiczne sposoby ich rozwiązywania.</p>
Analiza zespolona	<p>52. <u>Funkcje analityczne</u>: różniczkowalność względem zmiennej zespolonej, warunki Cauchy'ego-Riemanna, pojęcie funkcji analitycznej.</p> <p>53. <u>Funkcje elementarne</u>: funkcje z^n, e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\ln z$, definicje i własności.</p> <p>54. <u>Całka</u>: wzdłuż krzywej względem zmiennej zespolonej, funkcja pierwotna, globalne twierdzenie Cauchy'ego.</p> <p>55. Wzór całkowy Cauchy'ego.</p> <p>56. <u>Szeregi potęgowe</u>: promień zbieżności, szeregi Taylora, szeregi Laurenta.</p> <p>57. <u>Punkty osobliwe i izolowane</u>, typy punktów osobliwych i izolowanych, twierdzenie Sochockiego-Riemanna.</p> <p>58. <u>Residua</u>: definicja, obliczanie residuów, obliczanie całek za pomocą residuów.</p>
Metody numeryczne	<p>59. <u>Zagadnienie interpolacji</u>: wielomian interpolacyjny Lagrange'a, wzory interpolacyjne Newtona, interpolacja odwrotna.</p> <p>60. <u>Całkowanie numeryczne</u>: kwadratury Newtona-Cotesa, kwadratury Gaussa.</p> <p>61. <u>Aproksymacja funkcji</u>: aproksymacja średniokwadratowa punktowa, aproksymacja średniokwadratowa całkowa, aproksymacja funkcjami ortogonalnymi.</p> <p>62. Metody rozwiązywania równań nieliniowych.</p>
W zakresie rachunku prawdopodobieństwa	
	<p>63. Przestrzeń probabilistyczna, schemat Bernoulli'ego, prawdopodobieństwo warunkowe, całkowite i wzór Bayesa.</p> <p>64. Zmienna losowa i jej dystrybuanta, rozkład dyskretny, rozkład ciągły, wartość oczekiwana i wariancja oraz jej własności.</p> <p>65. Nierówności związane z momentami (Czebyszewa, uogólniona Czebyszewa, itp.).</p> <p>66. Niezależność zdarzeń losowych i zmiennych losowych.</p> <p>67. Zbieżności ciągów zmiennych losowych (z prawdopodobieństwem 1 i według p-ego momentu bezwzględnego, zbieżność według rozkładów) oraz zależności między nimi.</p> <p>68. Mocne i słabe prawo wielkich liczb oraz warunki wystarczające na ich zachodzenie.</p> <p>69. Centralne twierdzenie graniczne: twierdzenia Lindeberga-Levy'ego i Moivre'a-Laplace'a.</p> <p>70. Warunkowa wartość oczekiwana i rozkłady warunkowe.</p> <p>71. Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej i jej własności.</p>

	<p>W zakresie topologii</p>
	<p>72. <u>Przestrzenie metryczne</u>: metryka, rodzaje punktów i zbiorów w przestrzeniach metrycznych, ciągi i zbieżność, domknięcie, wnętrze i brzeg zbioru, baza przestrzeni metrycznej.</p> <p>73. <u>Przestrzeń topologiczna</u>: definicja, sposoby wprowadzania topologii, topologia przestrzeni metrycznej, aksjomaty oddzielania, przestrzenie Hausdorffa i przestrzenie normalne, operacje na przestrzeniach metrycznych i topologicznych, iloczyny kartezjańskie.</p> <p>74. <u>Przekształcenia ciągłe i homeomorfizmy</u>: lemat Uryhsona i twierdzenie Tietzego, przekształcenia Lipschitza i przekształcenia jednostajnie ciągłe, przestrzenie przekształceń.</p> <p>75. <u>Podstawowe typy przestrzeni topologicznych</u>: przestrzenie ośrodkowe, przestrzenie zwarte, przestrzenie spójne, kontinua, własności przekształceń ciągłych na takich przestrzeniach, twierdzenie Cantora dla przestrzeni zwartych i kontinuuów.</p> <p>76. <u>Przestrzenie zupełne</u>: twierdzenie Cantora.</p>
	<p>W zakresie geometrii</p>
	<p>77. Analityczna przestrzeń afiniczna i jej podprzestrzenie.</p> <p>78. Stosunek podziału, twierdzenie Talesa, Cevy i Menelaosa, współrzędne barycentryczne.</p> <p>79. Przekształcenia afiniczne, powinowactwa osiowe, dylatacje.</p> <p>80. Przestrzeń afiniczno-metryczna: iloczyn skalarny i odległość, prostopadłość, miara kąta.</p> <p>81. Izometrie na płaszczyźnie euklidesowej: parzystość, twierdzenie o rozkładzie, twierdzenia redukcyjne, klasyfikacja.</p> <p>82. Relacja przystawania i podobieństwa.</p> <p>83. Przestrzeń afiniczna i rzutowa w ujęciu syntetycznym.</p> <p>84. Zależności między przestrzeniami afinicznymi i rzutowymi: dopełnienie rzutowe i redukt afiniczny.</p> <p>85. Rola aksjomatów Desarguesa i Pappusa, twierdzenia o reprezentacji nad pierścieniem z dzieleniem i nad ciałem.</p> <p>86. Pojęcie wymiaru i twierdzenie o wymianie dla podprzestrzeni.</p> <p>87. Kolineacje i podstawowe twierdzenie geometrii rzutowej.</p>
	<p>W zakresie elementów informatyki</p>
	<p>88. <u>Budowa programu</u>: stałe, zmienne, komentarze, operacje arytmetyczne i logiczne, instrukcje warunkowe i iteracyjne, funkcje, wyrażenia.</p> <p>89. <u>Programowanie strukturalne</u>: prototyp i definicja funkcji, przekazywanie parametrów poprzez wartość i referencje, zwracanie wartości, wołanie funkcji, funkcje rekurencyjne.</p> <p>90. <u>Typy danych</u>: typy proste, tablice, napisy, wskaźniki i referencje. Struktury i klasy.</p> <p>91. Cyfrowa reprezentacja danych, analiza złożoności obliczeniowej algorytmów, maszyny Turinga.</p>