

## Minimalne wymagania dla osób zdających egzamin magisterski z matematyki finansowej, kończących studia od roku akademickiego 2020/2021

Znajomość zagadnień objętych wymaganiami na egzamin licencjacki oraz poniższych jest niezbędna do ubiegania się o uzyskanie stopnia magistra matematyki.

W zakresie analizy	
Analiza funkcjonalna	<ol style="list-style-type: none"><li>1. <u>Przestrzeń Banacha</u>: pojęcie i przykłady, skończenie wymiarowe i nieskończenie wymiarowe przestrzenie.</li><li>2. <u>Operatory liniowe</u>: pojęcie i przykłady, ograniczoność i norma operatora, przykłady obliczania normy operatorów.</li><li>3. <u>Przestrzeń Hilberta</u>: pojęcie iloczynu skalarnego, rzut na podprzestrzeń, układy ortogonalne, szeregi Fouriera.</li><li>4. <u>Zasady analizy funkcjonalnej</u>: twierdzenie Banacha o operatorze odwrotnym, twierdzenie Banacha-Steinhaus, twierdzenie Hahna-Banacha.</li><li>5. <u>Funkcjonały liniowe</u>: funkcyjnał liniowy ograniczony, przestrzeń sprzężona, twierdzenie o ogólnej postaci funkcyjnału w przestrzeni Hilberta, przykłady przestrzeni sprzężonych.</li></ol>
Analiza zespolona	<ol style="list-style-type: none"><li>6. <u>Funkcje analityczne</u> różniczkowalność względem zmiennej zespolonej, warunki Cauchy'ego-Riemanna, pojęcie funkcji analitycznej.</li><li>7. <u>Funkcje elementarne</u> funkcje <math>z^n</math>, <math>e^z</math>, <math>\cos z</math>, <math>\sin z</math>, <math>\ln z</math>, definicje i własności.</li><li>8. <u>Całka</u> całka wzdłuż krzywej względem zmiennej zespolonej, funkcja pierwotna, globalne twierdzenie Cauchy'ego.</li><li>9. Wzór całkowy Cauchy'ego.</li><li>10. <u>Szeregi</u> Szeregi potęgowe, promień zbieżności, szeregi Taylora, szeregi Laurenta.</li><li>11. <u>Punkty osobliwe i izolowane</u> typy punktów osobliwych i izolowanych, twierdzenie Sochockiego-Riemanna.</li><li>12. <u>Residua</u> definicja, obliczanie residuów, obliczanie całek za pomocą residuów.</li></ol>
Równania różniczkowe i różnicowe	<ol style="list-style-type: none"><li>13. Operatory rachunku różnicowego i ich własności.</li><li>14. Równania różnicowe liniowe <math>k</math>-tego rzędu, liniowa zależność i niezależność rozwiązań, Casoratian, fundamentalny układ rozwiązań.</li><li>15. Metody rozwiązywania równań różnicowych liniowych jednorodnych i niejednorodnych pierwszego rzędu.</li><li>16. Równania różnicowe liniowe o stałych współczynnikach. Rozwiązywanie równań jednorodnych i niejednorodnych.</li><li>17. Własności asymptotyczne rozwiązania równania różnicowego liniowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach.</li><li>18. Układy równań różniczkowych i różnicowych.</li><li>19. Liniowe układy równań różniczkowych i różnicowych, macierz fundamentalna, istnienie i jednoznaczność rozwiązania zagadnienia początkowego.</li><li>20. Stabilność w sensie Lapunowa rozwiązania układów równań różniczkowych i różnicowych, funkcja Lapunowa, twierdzenie Lapunowa.</li><li>21. Wybrane transformaty całkowe i ich zastosowania do równań różniczkowych.</li></ol>

	22. Transformata Z i jej zastosowanie.
Metody numeryczne	<p>23. <u>Zagadnienie interpolacji</u>: interpolacja funkcjami sklejanymi, interpolacja funkcjami wymiernymi.</p> <p>24. <u>Całkowanie numeryczne</u>: kwadratury złożone Newtona-Cotesa, kwadratury Gaussa.</p> <p>25. <u>Aproksymacja funkcji</u>: aproksymacja średniokwadratowa punktowa, aproksymacja średniokwadratowa całkowa, aproksymacja funkcjami trygonometrycznymi.</p> <p>26. Metody rozwiązywania układów równań nieliniowych.</p>
<b>W zakresie topologii</b>	
	<p>27. Własności topologiczne przestrzeni euklidesowych, przestrzeni Hilberta, zbioru Cantora itp.</p> <p>28. Przestrzenie rzutowe jako uzwarczenia przestrzeni euklidesowych.</p> <p>29. Przestrzenie zupełne: twierdzenie Baire'a, metoda kategorii, uzupełnianie przestrzeni metrycznych.</p>
<b>W zakresie teorii miary i całki</b>	
	<p>30. <u>Przestrzeń z miarą</u>: <math>\sigma</math>-algebra, miara, przykłady (miara Lebesgue'a, miara licząca, miara probabilistyczna).</p> <p>31. <u>Istnienie i jednoznaczność miary</u>: twierdzenie Carathéodory'ego o przedłużeniu miary (miara zewnętrzna, zbiory mierzalne), jednoznaczność takiego przedłużenia dla miar <math>\sigma</math>-skończonych.</p> <p>32. <u>Całka Lebesgue'a</u>: definicja dla funkcji prostych, nieujemnych mierzalnych i dowolnych mierzalnych, własności (w tym twierdzenia o przejściu z granicą pod całkę) i przykłady (dla miary Lebesgue'a, miary liczącej i miary probabilistycznej).</p> <p>33. <u>Twierdzenie Radona-Nikodyma</u>: miary absolutnie ciągłe, pochodna Radona-Nikodyma, przykłady.</p> <p>34. <u>Miary produktowe i całki iterowane</u>: definicja miary produktowej, twierdzenie Fubini'ego i twierdzenie Tonellego.</p>
<b>W zakresie rachunku prawdopodobieństwa i procesów stochastycznych</b>	
	<p>35. Zmienne losowe wielowymiarowe (rozkłady prawdopodobieństwa łączne i brzegowe).</p> <p>36. Macierze kowariancji wektorów losowych.</p> <p>37. Wielowymiarowy rozkład normalny.</p> <p>38. Warunkowa wartość oczekiwana (przypadek rozkładów ciągłych oraz dyskretnych)</p> <p>39. Funkcje tworzące (funkcje charakterystyczne - transformata Fouriera, funkcje tworzące momenty - transformata Laplace'a)</p> <p>40. Centralne twierdzenie graniczne.</p> <p>41. Pojęcie procesu stochastycznego i własności procesów. Proces Poissona.</p> <p>42. Twierdzenie Kołmogorowa o istnieniu procesu.</p> <p>43. Filtracja i momenty stopu.</p> <p>44. Martyngały i półmartyngały (własności, twierdzenia o zbieżności i rozkładzie).</p> <p>45. Proces Wienera (konstrukcja i własności).</p> <p>46. Całka stochastyczna Itô i jej własności.</p> <p>47. Łańcuchy Markowa.</p>

	<b>W zakresie statystyki</b>
	48. Statystyki pozycyjne, dostateczne i minimalne. 49. Rodziny wykładnicze 50. Własności estymatorów i nierówność Rao-Cramera 51. Informacja Fishera i jej własności
	<b>W zakresie teorii gier</b>
	52. <u>Definicja gry</u> : postać ekstensywna, postać normalna, strategie czyste i mieszane. 53. <u>Gry o sumie zero</u> : pojęcie i przykłady, strategie optymalne, punkty siodłowe, twierdzenie von Neumanna o minimaksie, gry symetryczne. 54. <u>Gry przeciwko Naturze</u> : pojęcie i przykłady, kryteria rozwiązywania gier przeciwko Naturze. 55. <u>Gry niekooperacyjne</u> : postać ekstensywna i normalna, równowaga Nasha, dylemat więźnia. 56. <u>Elementy teorii użyteczności</u> : użyteczność porządkowa i bezwzględna, loterie, twierdzenie o istnieniu funkcji użyteczności. 57. <u>Problem przetargu</u> : schemat arbitrażowy Nasha, strategie gróźb. 58. <u>Gry n-osobowe</u> : gry niekooperacyjne, gry kooperacyjne (koalicyjne), wartość Shapleya, rdzeń gry, zbiory stabilne. 59. <u>Modyfikacje pojęcia gry</u> : gry z continuum graczy, gry stochastyczne.
	<b>W zakresie teorii opcji</b>
	60. Rynek finansowy. Kontrakty terminowe. 61. Opcje i ich rodzaje oraz własności. 62. Model rynku finansowego z czasem dyskretnym. Wycena opcji na rynku dyskretnym. 63. Model rynku finansowego z czasem ciągłym. Model Blacka-Scholesa wyceny opcji. 64. Analiza wrażliwości w modelu Blacka-Scholesa.
	<b>W zakresie teoria ryzyka</b>
	65. <u>Prawdopodobieństwo jako miara ryzyka</u> : wnioskowanie Bayesowskie a pomiar ryzyka, ryzyko a niepewność, elementy teorii ruiny. 66. <u>Probabilistyczne modele ryzyka ubezpieczeniowego</u> : wycena ryzyka i kalkulacja składki przy znanym rozkładzie prawdopodobieństwa, własności składki, model ryzyka indywidualnego, model ryzyka łącznego - podstawowe rozkłady liczby szkód oraz łącznej wartości szkód, wzór rekurencyjny Panjera, optymalny podział ryzyka. 67. <u>Matematyczne modele ryzyka</u> : kredytowego, finansowego, operacyjnego, metody Monte Carlo w szacowaniu ryzyka.